

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет компьютерных наук

Кафедра информационных технологий управления

Разработка приложения для идентификации параметров пространственно-распределенных динамических систем с использованием комбинированных методов

Копытина Е.А.

Копытин А.В.

Постановка задачи

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} - v \frac{\partial x}{\partial l}, \quad (1)$$

$$x(0, l) = \varphi(l),$$

$$x(t, l^{\min}) = f_1(t), \quad x(t, l^{\max}) = f_2(t).$$

Задача заключается в идентификации процессов конвективной диффузии на основе анализа многомерных временных рядов и разработке алгоритмов параметрической идентификации механистической модели с постоянными коэффициентами по наблюдаемым значениям y_i^k , где $y_i^k = x_i^k + \varepsilon_i^k$.

Решение задачи. Разностные схемы

Явная четырехточечная разностная схема для уравнения (1) при замене точных значений решения в узлах сетки x_i^k на наблюдаемые значения y_i^k имеет вид:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = D \frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{(\Delta l)^2} - v \frac{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}{2\Delta l} + \zeta_i^k, \quad (2)$$

неявная четырехточечная разностная схема:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = D \frac{y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}}{(\Delta l)^2} - v \frac{y_{i+1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{2\Delta l} + \nu_i^k, \quad (3)$$

схема Кранка-Николсон:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = & \frac{D}{2(\Delta l)^2} \left((y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}) + (y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k) \right) - \\ & - \frac{v}{4\Delta l} \left((y_{i+1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}) + (y_{i+1}^k - y_{i-1}^k) \right) + \zeta_i^k, \end{aligned} \quad (4)$$

Решение задачи. Комбинированные методы

- Комбинирование позволяет компенсировать недостатки одних методов при помощи других и направлено на повышение качества параметрической идентификации, как одного из главных критериев эффективности модели.
- Для решения задачи идентификации используется комбинация МНК-оценок, полученных из уравнений вида (2) и расширенного фильтра Калмана. МНК-оценки дают начальную точку в пространстве поиска для реализации рекурсивного алгоритма Калмана.

Расширенный фильтр Калмана, построенный по схеме Кранка-Николсон

Уравнения (4), но уже для точного решения x , можно записать в виде:

$$-(\theta_1 + \theta_2)x_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\theta_1)x_i^{k+1} + (\theta_2 - \theta_1)x_{i+1}^{k+1} = (\theta_1 + \theta_2)x_{i-1}^k + (1 - 2\theta_1)x_i^k + (\theta_1 - \theta_2)x_{i+1}^k,$$

где $\theta_1 = \frac{D\Delta t}{2(\Delta l)^2}$, $\theta_2 = \frac{v\Delta t}{4\Delta l}$, $i = 1, \dots, m-2$, $k = 0, \dots, n-1$.

Или в матричном виде:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(x_0^k, x_0^{k+1}, x_{m-1}^k, x_{m-1}^{k+1})^T, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (5)$$

где $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ и $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ – трехдиагональные матрицы размера $(m-2) \times (m-2)$, зависящие от вектора параметров $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$,

Тогда рассматриваемая линейная динамическая модель может быть записана в пространстве состояний как:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\xi}_k), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \end{cases}$$

Расширенный фильтр Калмана, построенный по схеме Кранка-Николсон

Поскольку θ – постоянный вектор, тогда

$$\theta_{k+1} = \theta_k, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (6)$$

Тогда система (5) вместе с предположением (6) может быть переформулирована как нелинейная модель

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\theta_k) \mathbf{B}(\theta_k) \mathbf{x}_k \\ \theta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\theta_k) \mathbf{\Gamma}(\theta_k) \mathbf{u}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\theta_k) \mathbf{\Gamma}(\theta_k) \xi_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_k = (\mathbf{I}_{m-2} \quad \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \theta_k \end{pmatrix} + \eta_k, \end{cases} \quad (7)$$

Алгоритм расширенного фильтра Калмана

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{0|0} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{0|0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1^0, y_2^0, \dots, y_{m-2}^0)^T \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}}_{0|0} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}. \\ \text{Для } k = 1, 2, \dots, n, \\ \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{u}_k \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}) & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{u}_k \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}) & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{u}_k \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}^T + \\ + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\right)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T + \hat{\mathbf{R}} \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{P}}_{k|k} = \left(\mathbf{I}_m - \mathbf{K}_k \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}, \\ \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \end{array} \right.$$

где вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \left(\frac{\hat{D}\Delta t}{2(\Delta l)^2}, \frac{\hat{v}\Delta t}{4\Delta l} \right)^T$, где \hat{D} и \hat{v} – МНК-оценки параметров D и v

Алгоритм расширенного фильтра Калмана

В качестве итоговой оценки вектора параметров θ можно использовать последнее значение оценки $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{n|n}$, полученное при $k = n$. Тогда вектор оценок исходных

параметров D и v имеет вид $\left(\frac{2(\Delta l)^2 \hat{\theta}_1}{\Delta t}, \frac{4\Delta l \hat{\theta}_2}{\Delta t} \right)^T$.

Разработка приложения

Разработанное приложение состоит из следующих программных модулей:

- main;
- kalman_filters;
- adv_diff_kalman_all
- main_form.ui;
- table_form.ui.

Модуль kalman_filters содержит в себе следующие функции:

- explicit_kf;
- implicit_kf;
- kf_crank_nicolson.

Интерфейс приложения

Ввод параметров

Количество точек по времени

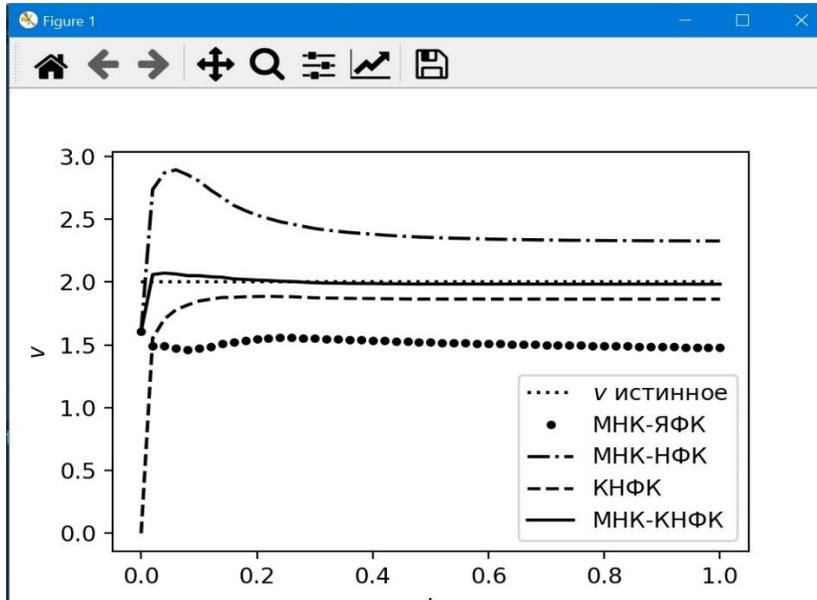
Количество точек по пространственной переменной

Коэффициент диффузии

Скорость адвекции

Шум

Количество экспериментов



Табличное представление

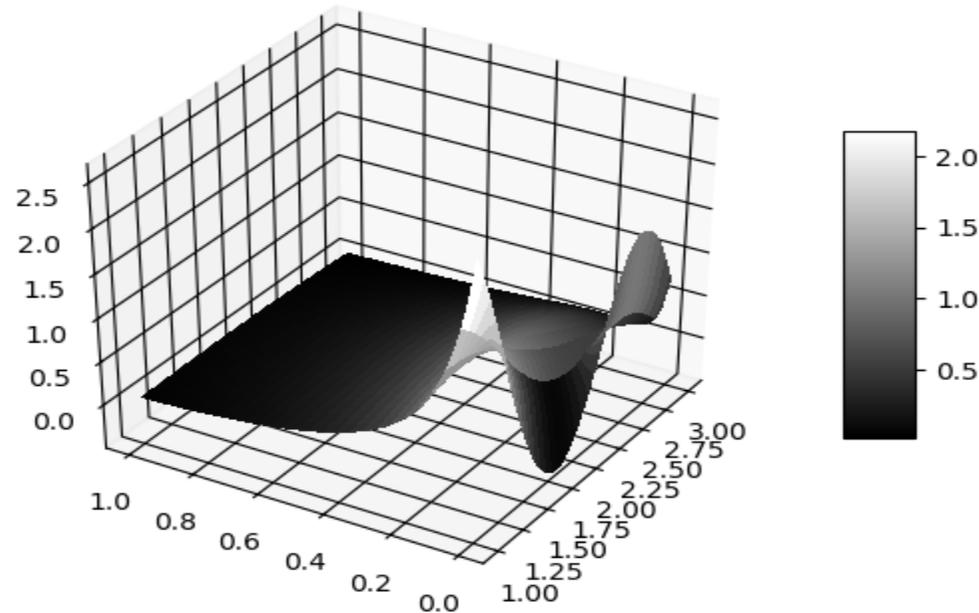
	1	2
1	60.7843	19.6170
2	16.0051	26.2336
3	7.0096	16.2599
4	4.3444	6.9399
5	0.9760	2.1070

Результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим следующее решение уравнения (1):

$$x(t, l) = \exp\left(\frac{v}{2D}\left(l - \frac{vt}{2}\right)\right) (\exp(-Dt) \sin(l) + \exp(-4Dt) \sin(2l) + \exp(-9Dt) \sin(3l)) \quad (8)$$

в прямоугольной области $[0, 1] \times [1, 3]$ при значениях параметров D и v равных соответственно 3 и 2. График решения представлен на рисунке.



Сравнение качества идентификации по статистическому критерию МАРЕ при $\Delta t = 0,001$

Методы	Параметры	Уровень погрешности		
		1%	5%	10%
МНК	D	15,66	82,90	95,13
	ν	4,69	30,91	39,86
Фильтр Калмана (явная схема)	D	0,33	0,36	0,54
	ν	1,30	1,34	1,54
Фильтр Калмана (неявная схема)	D	1,26	1,29	1,33
	ν	4,55	4,59	4,66
Фильтр Калмана по произвольной начальной точке	D	1,08	1,10	1,12
	ν	1,96	1,98	2,01
Фильтр Калмана (схема Кранка-Николсон)	D	0,48	0,49	0,51
	ν	1,60	1,62	1,65

Сравнение качества идентификации по статистическому критерию МАРЕ при $\Delta t = 0,01$

Методы	Параметры	Уровень погрешности		
		1%	5%	10%
МНК	D	16,35	83,00	95,16
	ν	5,94	32,26	41,62
Фильтр Калмана (явная схема)	D	8,58	20,64	38,22
	ν	27,50	34,06	48,00
Фильтр Калмана (неявная схема)	D	1,44	4,66	9,20
	ν	26,14	28,68	32,61
Фильтр Калмана по произвольной начальной точке	D	10,72	10,81	11,18
	ν	20,56	20,64	21,35
Фильтр Калмана (схема Кранка-Николсон)	D	0,13	2,15	6,37
	ν	0,46	1,30	3,98

Заключение

Основными результатами данного исследования являются:

1. Разработка нового комбинированного метода идентификации пространственно-распределенных динамических систем на основе расширенного фильтра Калмана и метода наименьших квадратов, который имеет низкую среднюю абсолютную ошибку.
2. Получено новое знание, заключающееся в том, что качество расширенного фильтра Калмана зависит от выбора разностной схемы, которая лежит в основе его работы.
3. Найдена эффективная разностная схема Кранка-Николсон.
4. Разработано приложение с графическим пользовательским интерфейсом, которое используется при проведении вычислительных экспериментов.